Probabilités

→ $\mathcal{T}$ tribu sur E ssi
- $*\ \emptyset, E \in \mathcal{T}$
- $*\ \forall (A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$
- $*\ A \in \mathcal{T} \iff A^c \in \mathcal{T}$

▷ tribu engendrée par X → plus petite tribu le contenant

▷ tribu borélienne : tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$

→ $\mathbb{P} : \mathcal{T} \to [0,1]$ probabilité ssi
- $*\ \mathbb{P}(\emptyset) = 0,\ \mathbb{P}(E) = 1$
- $*\ \forall (A)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

→ $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, $\forall n, A_n \subset A_{n+1}$, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

alors $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(A)$ | $\forall (A_n)\ \mathbb{P}(\bigcup A_n) \leq \sum \mathbb{P}(A_n)$

▷ $A_{n+1} \subset A_n$, $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(A)$.

→ Lois :
- * Bernoulli $\mathcal{B}(p)$: $\mathbb{P}(X=1) = p = 1 - \mathbb{P}(X=0)$
- * Binomiale / schéma de Bernoulli $\mathcal{B}(n,p)$ $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p^k)$
- * Poisson $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
- * Géométrique : $\mathcal{G}(p)$: $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} p$

→ Si $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{B}(p)$, $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$

→ $A, B \in \mathcal{T}$ indépendants ssi : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

$\Rightarrow A^c$ et B aussi

↳ $A_1, \dots, A_n$ mut. indép ssi

$\forall I \subset [\![1,n]\!]\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$

→ $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ | $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1) \dots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$

→ Proba tot, (A_n) partition de E : $\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B|A_k)\,\mathbb{P}(A_k)$

$\overset{\text{!!P}}{\rightarrow}$ $(\mathcal{T}_i)$ indép $\Rightarrow \forall (A_i) \in (\mathcal{T}_i)$ (A_i) indép

→ Borel Cantelli :

| $*$ (A_n) indép et $\sum \mathbb{P}(A_n) = +\infty \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p\right) = 1$

| $*$ (pas forcément indép) $\sum \mathbb{P}(A_n) < +\infty \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p\right) = 0$

→ X va $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{T}\ X^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ (est un evt)

$\mathcal{L}_X$ est la loi de X, $\mathcal{L}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$

→ $X_1, \dots, X_n$ indép, $\forall A$ $X_1^{-1}(A), \dots, X_n^{-1}(A)$ indép

→ $X_1, \dots, X_n$ indép $\Rightarrow f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ indép.

→ $\mathcal{T}$ tribu sur Ω où on peut choisir une suit inf de VA de Bern : $\forall \omega \in \Omega\ P(\omega) = 0$

HP $\longrightarrow$ Fonction de répartition : $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

$\hookrightarrow$ X possède une densité $\Rightarrow \exists f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \in \mathcal{L}^1$

$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt. \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}\ \mathbb{P}(X=a) = 0\ (\mathcal{C}^0)$

$\longrightarrow$ Loi produit $\mathbb{P}_E(\{a_n\}) = \alpha_n,\ \mathbb{P}_F(\{b_m\}) = b_m$

$\mathbb{P}_{E\times F}(\{(a_n, b_m)\}) = \alpha_n \beta_m$

$\longrightarrow$ Espérance : $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x)$

$\hookrightarrow$ X sommable $\Leftrightarrow (\mathbb{P}(X=x)\,|x|)_{x\in X(\Omega)}$ sommable

$\Leftrightarrow$ X possède une espérance.

$\hookrightarrow$ (A_n) part où $x = x_n$ p.s $\mathbb{E}(X) = \sum x_n \mathbb{P}(A_n)$

$\hookrightarrow$! $\mathbb{E}(f \circ X) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,\mathbb{P}(X=x)$

$\hookrightarrow$ $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ (peu importe X, Y)

$\hookrightarrow$ TU si dans $\mathbb{N}$ $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$

$\longrightarrow$ Inégo de Markov : $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$

$\longrightarrow$ X, Y indép $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$

$\longrightarrow$ Variance : $V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$\hookrightarrow$ X possède ~~une var~~ un mom r $\Rightarrow$ X " un mom^t factoriel $\mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1))$

→ C.S : X, Y ont un mom d'ordre 2 ⇒ XY somm.

et $|\mathbb{E}(XY)| \leq \mathbb{E}(X^2)^{1/2}\,\mathbb{E}(Y^2)^{1/2}$

→ $X_n \to X$ en proba ⇒ $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ pour tout $\varepsilon > 0$

→ $V(X) = 0 \iff X$ cste P.S

→ $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

→ $V(X_1 + \dots + X_n) = \sum V(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

→ Y centrée ⇒ $\mathbb{E}(Y) = 0$, réduite $\mathbb{E}(Y^2) = 1$.

→ Kolmogorov p115

→ Loi faible des gd nbres : $X_1, \dots, X_n, \dots$ VAAID (même loi)

$S_n = X_1 + \dots + X_n$: $\frac{S_n}{n} \to \mathbb{E}(X_1)$ en proba

$\left(\mathbb{P}(\dots) \leq \frac{V(S_n)}{n^2 \varepsilon^2} \dots\right)$

→ Fct gén. $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$ p120 à revoir

→ Fct caract $\mathbb{E}(e^{itX}) = \varphi_X(t)$ p123 à revoir

→ Kolmogorov $X_1, \dots, X_n$ centrées, indep, $V(X_i) < +\infty$ $\forall i$.

$S_k = X_1 + \dots + X_k$ alors : $\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| > x\right) < \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{x^2}$